RELACIÓN DE PROBLEMAS
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA

Curso 2004/2005

Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Agrícola

Departamento de Matemática Aplicada I

Tema 3. Derivadas Parciales. Aplicaciones.

3.1. Hallar las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones de dos variables:

a) $f(x,y) = 2x - 3y + 5$
b) $z = x\sqrt{y}$
c) $z = x^2 - 5xy + 3y^2$
d) $f(s,t) = s^2 e^{2t}$
e) $f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$
f) $f(x,y) = \log\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$
g) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{4y^2}{x}$
h) $z = e^{-(x^2+y^2)}$
i) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
j) $z = \operatorname{tg}(2x - y)$
k) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(xy)$
l) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2))$

3.2. Hallar las derivadas parciales primeras y segundas de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = 4x^3 - 6xy + 2y^3$

b) $f(x,y) = e^{x + \operatorname{sen} y}$

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

3.3. Comprobar que la función $z = \dfrac{2x+y}{2x-y}$ verifica la igualdad $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

3.4. Comprobar que la función $z = \log\sqrt{x^2 y + \operatorname{arctg}(x^2 y)}$ verifica la igualdad

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

3.5. Hallar el plano tangente a la superficie siguientes en los puntos que se indican:

a) $z = 25 - x^2 - y^2$, en el punto $(3, 1, 15)$.

b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, en el punto $(3, 4, 5)$.

c) $z = x^2 - y^2$, en el punto $(5, 4, 9)$.

d) $z = e^x(\operatorname{sen} y + 1)$, en el punto $(0, \pi/2, 2)$.

e) $z = \log\sqrt{x^2 + y^2}$, en el punto $(3, 4, \log 5)$.

3.6. Una empresa produce dos modelos de calentadores. El coste de producción de x unidades del primero e y unidades del segundo viene dado por la expresión $C(x,y) = 32\sqrt{xy} + 175x + 205y + 1050$.

a) Calcular los costes marginales ($\frac{\partial C}{\partial x}$ y $\frac{\partial C}{\partial y}$) cuando $x = 80$ e $y = 20$.

b) Cuando se requiera aumentar la producción, ¿qué modelo hará incrementar más el coste de producción? Justificar la respuesta.

3.7. Sea N el número de alumnos matriculados en una universidad, p el coste de mantenimiento y t el coste de la matrícula. Supongamos que N es una función de p y de t tal que $\frac{\partial N}{\partial p} < 0$ y $\frac{\partial N}{\partial t} < 0$. ¿Qué podemos concluir del hecho de ser negativas ambas derivas parciales?

3.8. Una medida de la sensación de calor en una persona viene dada por el *índice de temperatura aparente*. Ese índice admite el siguiente modelo:

$$A = 0.885t - 22.4h + 1.20th - 0.544,$$

donde A es la temperatura aparente en grados centígrados, t la temperatura del aire y h la humedad relativa.

a) Hallar $\dfrac{\partial A}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial A}{\partial h}$ para $t = 30^{\text{o}}$ y $h = 0.80$.

b) ¿Qué influye más sobre la temperatura aparente, la temperatura del aire o la humedad? Justificar la respuesta.

3.9. Hallar los extremos relativos de las siguientes funciones:

a)$f(x, y) = \dfrac{x^2y^2 + x + y}{xy}$	b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$
c) $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4$	d) $f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2$
e) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$	f) $f(x, y) = e^{-x} \operatorname{sen} y$
g) $f(x, y) = 2xy - \frac{1}{2}(x^4 + y^4) + 1$	h) $f(x, y) = x^2 + y^4$

3.10. Hallar los extremos relativos de $z = x^3 + x^2y + y^2 + 2y + p$. Calcular p de forma que z tenga un mínimo igual a 0.

3.11. Sea (x_0, y_0) un punto crítico de la función $f(x, y)$. Determinar si hay un máximo o mínimo relativo,un punto de silla o si la información es insuficiente, conocidos los datos que se indican en cada uno de los siguientes casos:

a) $f_{xx}(x_0, y_0) = 9, f_{yy}(x_0, y_0) = 4, f_{xy}(x_0, y_0) = 6.$

b) $f_{xx}(x_0, y_0) = -3, f_{yy}(x_0, y_0) = -8, f_{xy}(x_0, y_0) = 2.$

c) $f_{xx}(x_0, y_0) = -9, f_{yy}(x_0, y_0) = 6, f_{xy}(x_0, y_0) = 10.$

d) $f_{xx}(x_0, y_0) = 25, f_{yy}(x_0, y_0) = 8, f_{xy}(x_0, y_0) = 10.$

3.12. Calcular los extremos absolutos de la función $f(x, y)$ en la región R (en todos los casos, R contiene sus puntos frontera):

a) $f(x,y) = 12 - 3x - 2y$ en la región

$$R \equiv \{\text{Triángulo con vérices } (2,0),(0,1),(1,2)\}$$

b) $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y$ en la región

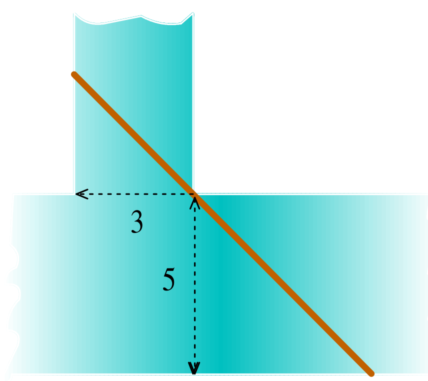
$$R \equiv \left\{\text{Acotada por la curvas } y = x^2, y = 4\right\}$$

3.13. Hallar los catetos del triángulo rectángulo de área máxima, entre todos aquellos que tienen hipotenusa igual a 20 cm.

3.14. La base menor de un trapecio rectángulo mide 3 cm y el lado oblicuo 6 cm. Hallar el ángulo que debe formar dicho lado con la base mayor para que el área sea máxima.

3.15. Una estatua de 4 m de altura está situada sobre una base de 3 m de altura. ¿A qué distancia, desde el suelo horizontal, se verá dicha estatua bajo un ángulo máximo?

3.16. Un canal de agua tiene una desviación en ángulo recto. El ancho del canal es de 5 m y el de la desviación es de 3 m. Hallar la longitud máxima de un tronco que, flotando en el canal, pueda tomar la desviación.



3.17. Dos ciudades A y B distan 4 y 7 km, respectivamente, de una línea de ferrocarril rectilínea. Sabiendo que la distancia entre ambas ciudades es de 5 km, hallar el lugar de la línea de ferrocarril donde debe situarse una estación para que la longitud de las carreteras a construir uniendo dichas ciudades con la nueva estación sea mínima.

3.18. Determinar el punto de la función $f(x) = 2x^2$ más próximo al punto $(0,6)$.

3.19. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3,2)$ y determina con los ejes coordenados un triángulo de área mínima en el primer cuadrante.

3.20. Dado un semicírculo de 6 cm de radio, hallar las dimensiones del mayor rectángulo que se puede inscribir en él.

3.21. Hallar las dimensiones del cilindro de mayor volumen que se puede inscribir en un cono de 3 m de radio y 7 m de altura.

3.22. Hallar las dimensiones del cilindro de mayor superficie lateral que se puede inscribir en una esfera de 10 cm de radio.

3.23. En un triángulo se conoce el ángulo α y se sabe que los lados contiguos a dicho ángulo suman 20 cm. Hallar la longitud de estos lados de forma que el área del triángulo sea máxima.

3.24. Determinar,en función del parámetro c, un punto de la recta $y = 2x$ tal que la suma de los cuadrados de las distancias de dicho punto a los puntos $A(-5, 0), B(5, 0)$ y $C(0, c)$ sea mínima.

3.25. Se tiene un rectángulo de 12 cm de perímetro. Sobre sus lados se trazan cuatro semicircunferencias exteriores a él. Hallar la superficie total mínima de la figura obtenida.

3.26. Un espejo plano, dimensiones 80 por 90 cm, se rompe por una esquina. De los trozos resultantes, el menor tiene forma de triángulo rectángulo, de catetos 10 y 12 cm, correspondientes a las dimensiones menor y mayor del espejo. Hallar el área máxima del espejo rectangular que se puede construir con el trozo mayor.

3.27. Un barco está situado a 9 km de la orilla rectilínea. Se quiere enviar un mensajero a un campamento situado en la orilla a 18 km del barco. Teniendo en cuenta que el mensajero recorre 4 km por hora remando y 5 km por hora andando, hallar a qué punto de la orilla debe dirigirse para llegar al campamento lo antes posible.

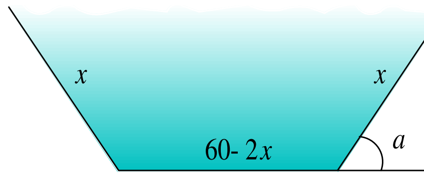
3.28. Una ventana tiene forma de rectángulo, con un semicírculo en la parte superior. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 4 m, hallar las dimensiones de la ventana de mayor superficie.

3.29. Una empresa fabrica un artículo que vende a 400 euros la unidad. El coste total para colocar en el mercado x unidades de dicho artículo viene dado por la función $f(x) = 0.02x^2 - 160x + 400000$. ¿Cuántos artículos será preciso vender para obtener un beneficio máximo?

3.30. Encontrar el punto de la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2 - xy + 1}$ más próximo al origen de coordenadas.

3.31. Dividir un segmento de longitud m en tres partes, de modo que su producto sea máximo.

3.32. Se quiere convertir una plancha de zinc de 60 cm de ancho en un canalón, como muestra la figura. Hallar el valor de x y de a para que el caudal sea máximo.



3.33. Descomponer el número 9 en tres sumandos positivos, de modo que la suma de sus cubos sea mínima.

3.34. Hallar la distancia mínima del punto $(2,1,1)$ al plano de ecuación $x+y+z=1$.

3.35. Una caja rectangular descansa sobre el plano XY con un vértice en el origen. Hallar el volumen máximo de la caja si el vértice opuesto al origen está sobre el plano $6x+4y+3z-24=0$.

3.36. Una empresa fabrica dos productos. Los ingresos totales por la venta de a unidades del primero y b del segundo son $R=-5a^2-8b^2-2ab+42a+102b$. Hallar a y b de forma que los ingresos sean máximos.

3.37. Una industria fabrica un producto de dos factorías. El coste de producción de x unidades en la primera es $C_1=0.02x^2+4x+500$ y el coste de producción de y unidades en la segunda es $C_2=0.05y^2+4y+275$. Si el producto se vende a 15 euros la unidad, calcular qué cantidad debe producirse en cada factoría con el fin de hacer máximo el beneficio $B=15(x+y)-C_1-C_2$.

3.38. Un fabricante recibe un pedido de 1000 unidades de un producto que produce en dos lugares distintos. Sean x e y los números de unidades producidos en cada uno de ellos. Hallar los valores que permiten servir el pedido con el menor coste posible, sabiendo que la función de coste viene dada por $C=0.25x^2+10x+0.15y^2+12y$.